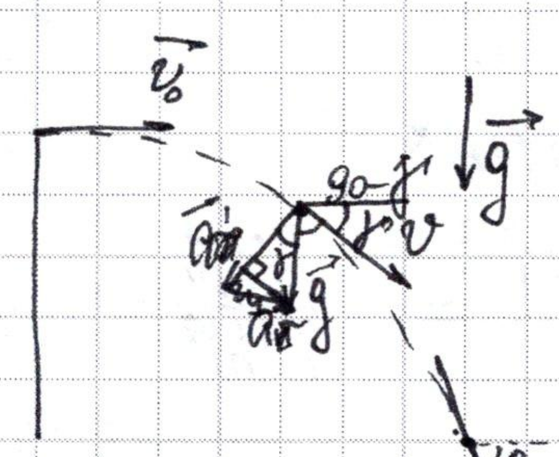
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 4



№1.

Среднее тангенциальное ускорение $a_{\tau c} = \frac{2}{3} a_\tau$

$a_\tau = g \cdot \cos\gamma$. Где γ – угол, под которым в данный момент направлена скорость камня. Пусть камень упал под углом β к горизонту. Тогда в конце $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, $a_\tau = g\cos\beta$; $v_x = v_0 = const$; $v_1\cos\beta = v_0$; $v_{y_1} = \sqrt{2gh}$, где h – высота стены горки. $v_1 = \sqrt{v_{y_1}^2 + v_0^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh + v_0^2} \Rightarrow \sqrt{2gh+v_0^2}\cdot\cos\beta = v_0 \Rightarrow \cos\beta = \frac{v_0}{\sqrt{2gh+v_0^2}}$

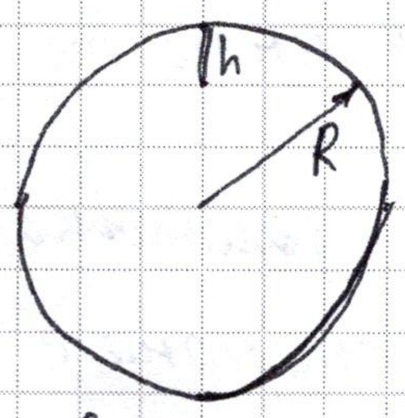
$a_\tau = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$; $a_{\tau c} = \frac{2}{3}\cdot\frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2+2gh}}$; $a_\tau' = g\sin\beta$; $v_y = v_1\sin\beta$;

$v_y = \sqrt{2gh}$; $v_1 = \sqrt{2gh+v_0^2}$; $\sin\beta = \sqrt{\frac{2gh}{2gh+v_0^2}}$; $a_\tau = g\cdot\sqrt{\frac{2gh}{2gh+v_0^2}}$;

В любой момент $a_\tau' = g\sin\gamma$; $\sin\gamma = \sqrt{\frac{2gl}{2gl+v_0^2}}$

$a_{\tau c} = \frac{2}{3}\cdot g\cdot\sqrt{\frac{2gh}{2gh+v_0^2}}$;

№3



На глубине $\frac{h}{3}$ ракета имеет скорость v_I.

$ma_n = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$;

Когда ракета находится на глубине l, ее притягивают лишь слои планеты под ней, а все остальное – нет, – по Th. Гаусса. На ~~глубине~~ расстоянии l ~~все~~ скорость сила притяжения равна: от центра

Можно использовать оборот листа для записи решений

$\frac{GMm}{(R-l)^2}$ $\frac{GMm}{l^2} = \frac{GM}{l^2} \cdot \frac{4}{3}\pi l^3 m = F = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi l m = F$

$dA = F \cdot dl$. Найдём работу, которая ~~понадобится~~ что проделает сила тяжести $\int dA = F \cdot dl \Rightarrow \int dA = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi m \int_{l=R}^{l=\frac{2}{3}R} l \cdot dl \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{4G\rho\pi m}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \Rightarrow A = \frac{4G\rho\pi m}{3} \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{4G\rho\pi m}{3} \cdot \frac{4}{9}R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{4G\rho\pi m}{3} \cdot \left(\frac{R^2}{2} - \frac{4}{9}R^2\right) \Rightarrow A = \frac{4G\rho\pi m}{3} \cdot \frac{5}{9}R^2 \Rightarrow A = \frac{20G\rho\pi m R^2}{54} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{10}{27}G\rho\pi m R^2$; По ЗСЭ: $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{10}{27}G\rho\pi m R^2 + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1^2 = \frac{20}{27}G\rho\pi R^2 + v^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_1^2 - \frac{20}{27}G\rho\pi R^2}$

По ЗСЭ: $\frac{mv^2}{2} = \frac{mMG}{h^2} - \frac{mMG}{R^2} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{mMG}{(R+h)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{MG}{R^2} + \frac{v^2}{2} = -\frac{MG}{(R+h)^2} \Rightarrow -\frac{MG}{R^2} + \frac{v_1^2 - \frac{20}{27}G\rho\pi R^2}{2} = -\frac{MG}{(R+h)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{MG}{R^2} + \frac{\frac{GM}{R} - \frac{20}{27}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\frac{1}{R}G}{2} = -\frac{MG}{(R+h)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{MG}{R^2} + \frac{\frac{GM}{R} - \frac{5}{9}\cdot\frac{MG}{R}}{2} = -\frac{MG}{(R+h)^2} \Rightarrow -\frac{1}{R} + \frac{\frac{1}{R} - \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{R}}{2} = -\frac{1}{R+h} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{R} + \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{R}}{2} = -\frac{1}{R+h} \Rightarrow -\frac{1}{R} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h} \Rightarrow -\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h} \mid \cdot(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{R} = \frac{1}{R+h} \Rightarrow R+h = \frac{1}{\frac{7}{9R}} \Rightarrow R+h = \frac{9R}{7} \Rightarrow h = \frac{9R}{7} - R \Rightarrow h = \frac{2}{7}R$;

Ответ: $h = \frac{2}{7}R = \frac{2}{7}\cdot 462 = 132$ км.

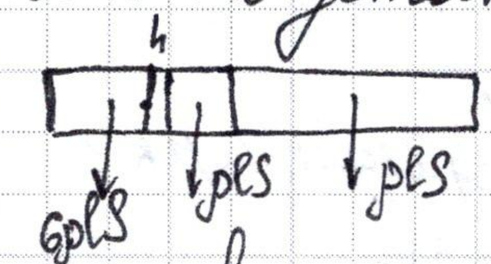
N.4.

Попробуем высчитать среднюю плотность: $\rho_0 = \frac{m_{об}}{V_{об}} = \frac{m_{об}}{7lS} = \frac{S(6l\rho + pl + pl)}{7lS} =$

$= \frac{8lpS}{7lS} = \frac{8}{7}\rho$. То есть если ~~жидкости~~ налить очень много, то цилиндр не всплывёт, а останется на дне. Понятно, что заготовка будет стоять вертикально, и вверх будет направлена сторона с наименьшей плотностью.

Пусть заготовка стоит вертикально, найдём, какой нужен уровень

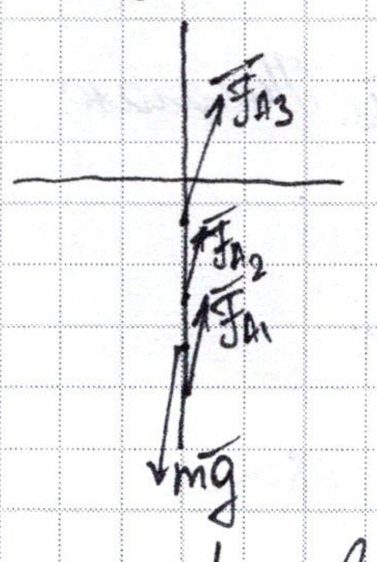
жидкости, чтобы её равновесие было устойчивым. Где центр масс заготовки?

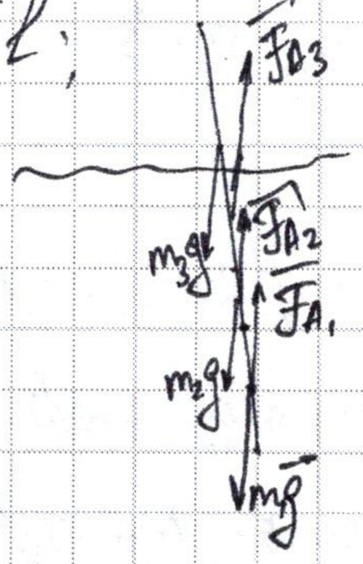


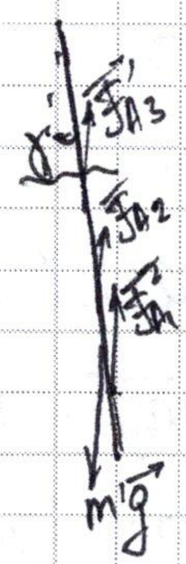
Пусть центр масс на расстоянии h от левого края. Предположим, он находится между центрами масс $6\rho ls$ и ρls. Тогда по моменту: $6\rho lsg\cdot(h-\frac{l}{2}) = \rho ls\cdot(2{,}5l-h)g + \rho ls(5l-h)g \mid :\rho lsg \Rightarrow$

$\Rightarrow 6h-6l = 2{,}5l-h+5l-h \Rightarrow 8h = 6l+5l+2{,}5l \Rightarrow 8h = 13{,}5l \Rightarrow h = \frac{13{,}5}{8}l \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{27}{16}l;$







2 мал. Пусть мы возьмём точку О, из которой и идёт вектор $m_0\vec{g}$. Относительно этой точки сд запишем моменты.

$F_{A1}\cdot\frac{11}{16}l\cdot\cancel{\cos\gamma}\,\sin\gamma = F_{A2}\cdot\frac{13}{16}l\cdot\sin\gamma + F'_{A3}\cdot\sin\gamma\cdot(\frac{1}{2}H-\frac{51}{16}l)$

$2{,}5l-\frac{27}{16}l = \frac{13}{16}l$

Пусть высота воды $= H$. $(H-3l)\cdot\frac{1}{2}$ – точка приложения F_{A3}', но относительно О — $(H-3l)\frac{1}{2}-\frac{27}{16}l = \frac{1}{2}H-1{,}5l-\frac{27}{16}l = \frac{1}{2}H-\frac{24+27}{16}l = \frac{1}{2}H-\frac{51}{16}l$

$F_{A1}\cdot\frac{11}{16}l\cdot\sin\gamma = F_{A2}\cdot\frac{13}{16}l\sin\gamma + F_{A3}'\cdot(\frac{1}{2}H-\frac{51}{16}l)\sin\gamma \mid :\sin\gamma \Rightarrow$

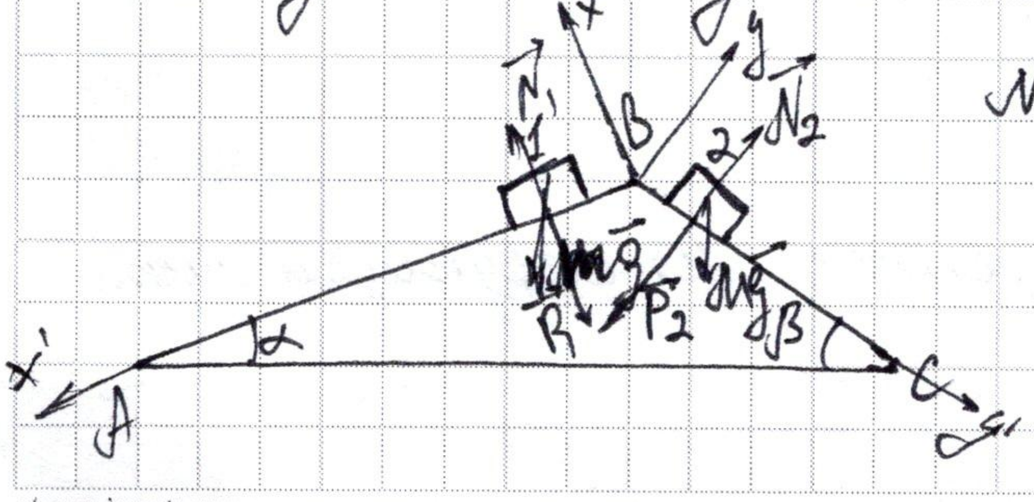
$\Rightarrow \rho g\cdot\frac{2}{6}ls\cdot\frac{11}{16}l = \cancel{2}\rho gls\cdot\frac{13}{16}l + 4\cancel{\rho g}ls\cdot(\frac{1}{2}H-\frac{5}{16}l) \mid :\rho gls \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{11}{8}l = \frac{13}{16}l + 2H - \frac{51}{4}l \Rightarrow 2H = \frac{51}{4}l + \frac{5{,}5}{4}l - \frac{3{,}25}{4}l \Rightarrow 2H = \frac{53{,}25}{4}l \Rightarrow$

$\Rightarrow H = \frac{53{,}25}{8}l \Rightarrow H = 6{,}65625l \approx 6{,}66l;$

Ответ: для этого нужно $H = 6{,}66l$.

N. 6.



По II закону Ньютона на Oy:

$Mg\cos\beta = N_2$; По II зак. Ньютона на Ox:

$N_1 = mg\cos\alpha$;

Можно использовать оборот листа для записи решений

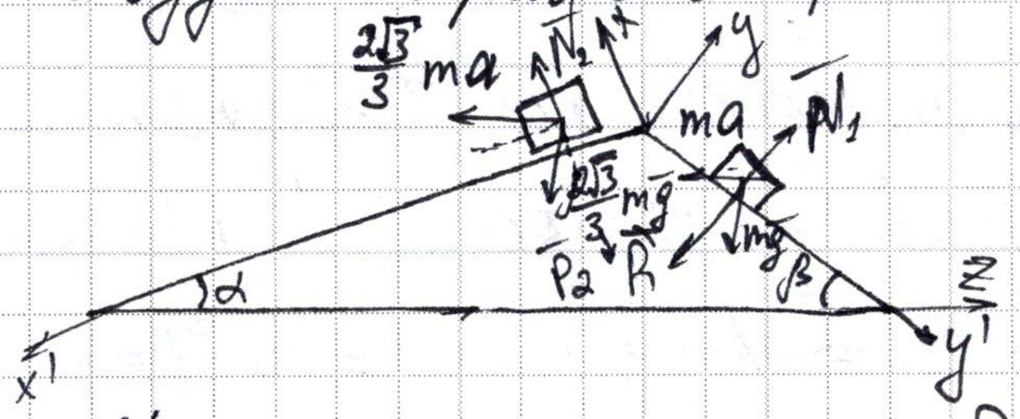
$\vec{P_1} = -\vec{N_1}$; $P_2 = -\vec{N_2}$; Напишем проекции P_1 и P_2 на горизонтальную ось: $P_1 \sin\alpha = P_2 \sin\beta$; $\Rightarrow N_1 \sin\alpha = N_2 \sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow mg\cos\alpha\sin\alpha = Mg\sin\beta\cdot\cos\beta \;|:g \Rightarrow m\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha = M\cdot\frac{1}{2}\sin 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow m\sin 2\alpha = M\sin 2\beta \Rightarrow M = \frac{m\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} \Rightarrow M = \frac{m\cdot\sin 90^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow M = \frac{m\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{M = \frac{2\sqrt{3}}{3} m;}$

Перейдём в СО НеИСО Ледяной горки. Пусть её ускорение $a_з$. Полагаю, оно будет направлено вправо.



По II закону Ньютона на Ox':

$N_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} ma\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow N_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$

$N_1 = ma\cdot\sin\beta + mg\cos\beta$; $P_{2z} = N_2\cdot\sin\alpha$; $P_1 = N_1\cdot\sin\beta$.

$Ma = P_{2z} - P_{1z} \Rightarrow Ma = N_2\sin\alpha - N_1\sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow Ma = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} mg\cos\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} ma\sin\alpha\right)\sin\alpha - (ma\sin\beta + mg\cos\beta)\cdot\sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow Ma = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg\cos\alpha\sin\alpha - \frac{2\sqrt{3}}{3} ma\sin^2\alpha - ma\sin^2\beta - mg\sin\beta\cdot\cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow Ma + \frac{2\sqrt{3}}{3} ma\sin^2\alpha + ma\sin^2\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg\cos\alpha\cdot\sin\alpha - mg\sin\beta\cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{4} ma + \frac{2\sqrt{3}}{3} ma\sin^2\alpha + ma\sin^2\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg\cos\alpha\sin\alpha - mg\sin\beta\cdot\cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow a\left(\frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\alpha + \sin^2\beta\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\alpha\cdot\sin\alpha - \sin\beta\cdot\cos\beta\right)g \Rightarrow$

$\Rightarrow a\left(\frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g \Rightarrow$

$\Rightarrow a\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)g \Rightarrow a\cdot\left(2\frac{3}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12} g \Rightarrow a\frac{6+\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12} g\,|\cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(6+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} g \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{4(6+\sqrt{3})} g \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{24+4\sqrt{3}} g \Rightarrow a = \frac{1{,}732}{30{,}928} g \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0{,}056g \Rightarrow a \approx 0{,}55$ ~~5,5~~ $\boxed{a \approx 0{,}55 \frac{м}{с^2}}$

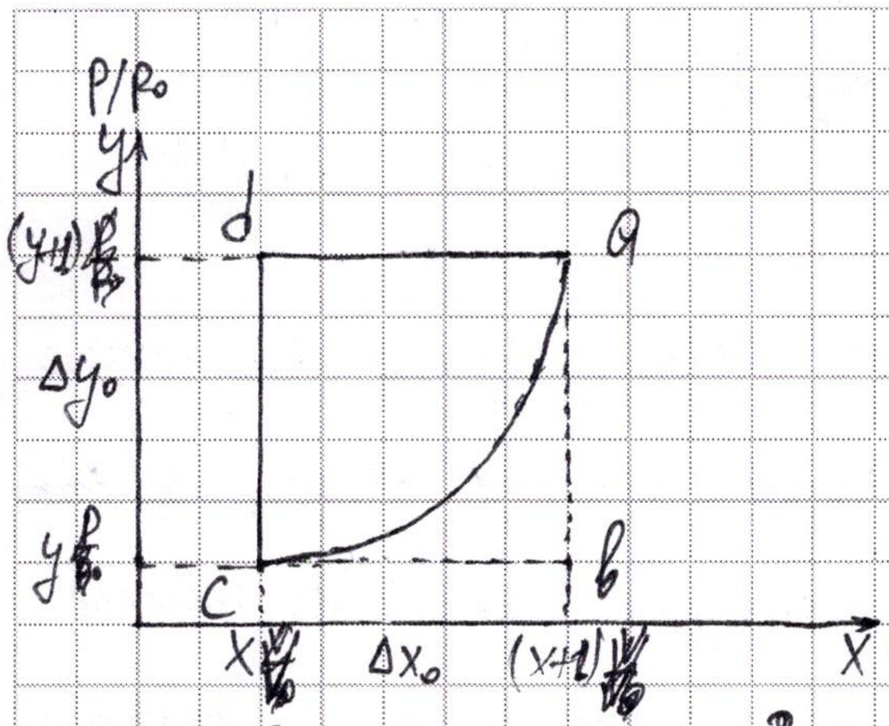
Ответ: 1) $m_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m$; $a = 0{,}55 \frac{м}{с^2}$, вправо.

N.5

С газом совершают цикл abca. Продолжение на следующем листе

→

olymp.bmstu.ru



$\eta = \frac{A}{Q_н}$. То есть η равна площади внутри графика, разделённой на всё тепло, полученное от нагревателя.

$S = \Delta x_0 \cdot \Delta y_0 - \frac{\pi}{4}\Delta x_0 \cdot \Delta y_0 \Rightarrow S = \Delta x_0 \cdot \Delta y_0 \cdot (1 - \frac{\pi}{4})$

$Q_н = S + Q_{сд}$, $\Delta U_{CA} = \frac{3}{2}\nu R(T_A - T_C) \Rightarrow \Delta U_{CA} = 1{,}5(y+1)(x+1)V_0p_0 - 1{,}5xyp_0V_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta U_{CA} = 1{,}5(xy + x + y + 1 - xy)p_0V_0 \Rightarrow \Delta U_{CA} = 1{,}5p_0V_0(x+y+1)$.

$S = p_0V_0 \cdot (1 - \frac{\pi}{4})$; $\eta = \frac{p_0V_0 \cdot (1 - \frac{\pi}{4})}{1{,}5p_0V_0(x+y+1) + p_0V_0 \cdot (1 - \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \eta = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1{,}5x + 1{,}5y + 1{,}5 + 1 - \frac{\pi}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1{,}5(x+y) + 2{,}5 - \frac{\pi}{4}} \Rightarrow 1{,}5\eta(x+y) + 2{,}5\eta - \eta\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}5\eta(x+y) = 1 - \frac{\pi}{4} + \eta\frac{\pi}{4} - 2{,}5\eta \Rightarrow x + y = \frac{1 - \frac{\pi}{4} + \eta\frac{\pi}{4} - 2{,}5\eta}{1{,}5\eta}$;

$\eta_{ACDA} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot p_0V_0}{\frac{\pi}{4}p_0V_0 + \Delta U_{CA}} \Rightarrow \eta_{ACDA} = \frac{\frac{\pi}{4}p_0V_0}{\frac{\pi}{4}p_0V_0 + 1{,}5p_0V_0(x+y+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{ACDA} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} + 1{,}5 + 1{,}5(x+y)}$; $1{,}5\eta(x+y) = 1 - \frac{\pi}{4} + \eta\frac{\pi}{4} - 2{,}5\eta$

$1{,}5(x+y) = \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\eta} + \frac{\pi}{4} - 2{,}5$

$\eta_{ACDA} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} + 1{,}5 + \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\eta} + \frac{\pi}{4} - 2{,}5} \Rightarrow \eta_{ACDA} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{\eta}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{ACDA} = \frac{\pi}{(2\pi - 4) + \eta\frac{4 - \pi}{\eta}} \Rightarrow \boxed{\eta_{ACDA} = \frac{\pi\eta}{2\pi\eta - 4\eta + 4 - \pi}}$

Площадь квадрата a-b-c-d-a равна p_0V_0. $Q_н = p_0V_0 + \Delta U_{CA}$.

$\eta_{ABCDA} = \frac{p_0V_0}{p_0V_0 + 1{,}5p_0V_0(x+y+1)} \Rightarrow \eta_{ABCDA} = \frac{1}{1 + 1{,}5 + 1{,}5(x+y)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta_{ABCDA} = \frac{1}{2,5+1,5(x+y)}; \quad 1,5(x+y) = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{\eta} + \frac{\pi}{4} - 2,5$$

$$\eta_{ABCDA} = \frac{1}{2,5 + \frac{1-\frac{\pi}{4}}{\eta} + \frac{\pi}{4} - 2,5} \Rightarrow \eta_{ABCDA} = \frac{1}{\frac{1-\frac{\pi}{4}}{\eta} + \frac{\pi}{4}\eta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta_{ABCDA} = \frac{\eta}{1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\eta} \Rightarrow \boxed{\eta_{ABCDA} = \frac{\eta}{\frac{\pi}{4}\eta + 1 - \frac{\pi}{4}};}$$

$\eta_0 = \eta_{\text{идеал}} \dfrac{1-\frac{\pi}{4}}{1,5(x+y)+2,5-\frac{\pi}{4}}$. Если пропорции самого графика остаются неизменными, то есть стороны прямоугольника радиус окружности остаётся равен 1, то тогда меняется лишь сумма $(x+y)$. x – расстояние точки C от O по Ox, а y – расстояние точки C от O по Oy. Значит, мы можем сказать, что точка C будет лежать почти в начале координат, и тогда $(x+y) \approx 0$.

$$\eta_{max} = \frac{1-\frac{\pi}{4}}{2,5-\frac{\pi}{4}} \approx \frac{0,21}{1,715} = 12,2\ \%$$

Ответ: 1) $\eta_{ABCDA} = \dfrac{\eta}{\frac{\pi}{4}\eta + 1 - \frac{\pi}{4}}$; $\eta_{ACDA} = \dfrac{\pi\eta}{2\pi\eta - 4\eta + 4 - \pi}$;

2) $\eta_{ABCDA\ max} \approx 12,2\ \%$.

№ 7.

ПБ есть дни ночью, когда температура мала, насос запускает внутрь сосуда воду. Далее температура в сосуде растёт и соответственно растёт давление. В связи с этим вода вталкивается в трубу

$pV = \nu RT$; $p = \dfrac{\nu RT}{V}$; νRT_1, $T_1 = 278°K$; $T_1' = 293°K$; $T_2 = 293°K$; $T_2' = 307°K$.

$p_1 = \dfrac{293}{278} p_0 \Rightarrow p = \dfrac{293}{278} \cdot 10^5$ Па; $\Delta p_1 = \dfrac{15}{278} \cdot 10^5$ Па $= 3054 \cdot 10^5 = 5395,7$ Па;

$p_2 = \dfrac{307}{293} p_0 \Rightarrow p_2 = p_2 = \dfrac{307}{293} p_0 10^5$ Па; $\Delta p_2 = \dfrac{15}{293} \cdot 10^5$ Па $= 0,0512 \cdot 10^5$ Па $= 5119,5$ Па.

Необходимо давление $p_н$, чтобы поднять воду в трубе на 0,5 м, ведь если давления в трубках сравняются до момента, когда вода поднимется на 0,5 м, то жидкость вообще не утечёт.

$p_н = \rho g h \Rightarrow p_н = 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 4900$ Па это действительно меньше чем Δp_1 и Δp_2, значит насос будет работать.

olymp.bmstu.ru

Производительность насоса в двуж этих случаях различаться не будет, т.к. насос будет работать днём, пока вся вода в нём не закончится, ведь отверстие входное около дна и вода слабо меняет объём сосуда. Как я посчитал выше, разности давлений в обе погоды достаточно чтобы поднять воду на 35м, а дальше она будет течь сама, пока не закончится, если у трубы нет подъёма вверх. А течь до конца она будет, т.к. давление в сосуде выше давления в трубе, т.к. у трубы недостаточно высоты чтобы компенсировать давление в сосуде.

Ответ: в 1 раз (отличаться не будут).

№2.

$M_{воды} = 0{,}018$ кг/моль. В сосуде $\nu = 1$ моль воды. Очевидно, она частично или полностью в газообразном состоянии, ведь кроме неё в сосуде ничего нет, но давление внутри присутствует. Пар можно считать идеальным газом (насыщенный). $pV = \nu RT$; $T = \frac{pV}{\nu R} \Rightarrow T = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{8{,}31 \cdot 1} = 120{,}34$°K. При такой температуре вода твердеет. Ошибка. Возможно не вся пар вся вода превратилась в пар. При температуре $T = 100$°C давление насыщенных паров равно 10^5 Па. Из этого делаем вывод, что температура в сосуде 273°K. $pV = \nu RT \Rightarrow \nu = \frac{pV}{RT} \Rightarrow \nu = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{8{,}31 \cdot 873} = 0{,}323$ моль. Именно столько воды находится в газообразном состоянии. Чтобы давление упало на 10%, нужно удалить воду в жидком состоянии и часть пара. $0{,}9 p_0 V = \nu_1 RT \Rightarrow \nu_1 = \frac{0{,}9 p_0 V}{RT} \Rightarrow \nu_1 = 0{,}9\nu \Rightarrow \nu_1 = 0{,}2907$ моль. Пока мы будем удалять ~~воду~~ жидкую воду, давление не будет меняться, ведь пар будет оставаться насыщенным. Поэтому нужно удалить

$1 - 0{,}2907 = 0{,}7093$ моль воды, что равно $0{,}7093 \cdot 18 \approx 12{,}7672$.

Ответ: нужно удалить 12,77 г воды из сосуда.